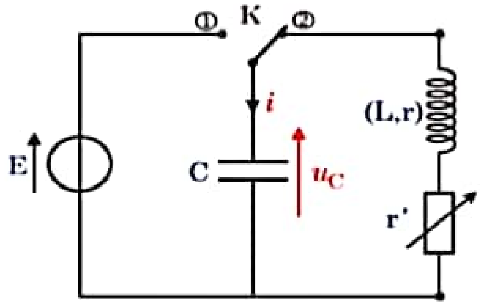
Niveau :2Bac SM et PC Matière :Physique	Oscillations libres dans un circuit R L C en série	PROF :Mohamed Said

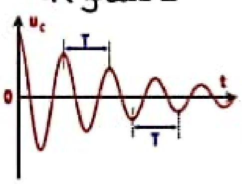
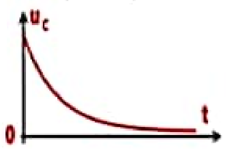
Oscillations libres dans un circuit R L C en série

I. Décharge d'un condensateur dans une bobine :

On réalise le montage suivant :

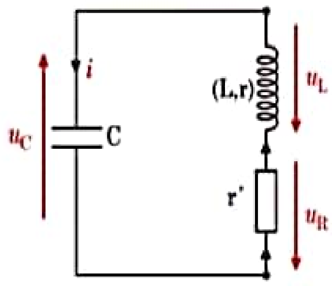


on place l'interrupteur (K) sur la position (1), le condensateur se charge, puis on bascule l'interrupteur sur la position (2). Le condensateur se décharge dans la bobine et le conducteur ohmique.
Selon la valeur de la résistance du circuit, on observe sur l'écran de l'oscilloscope les régimes suivants :

Régime pseudo-périodique	Régime critique	Régime apériodique
R faible 	R grande  u_c tend rapidement vers zéro	R plus grande  u_c tend vers zéro sans oscillations

II. Etude analytique d'un circuit oscillant :

1. Equation différentielle d'un circuit RLC en série :



d'après la loi d'additivités des tensions :

$$u_L + u_R + u_c = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + ri + Ri + u_c = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + (R+r)i + u_c = 0$$

avec : $\cdot\ i = c\frac{du_c}{dt}$

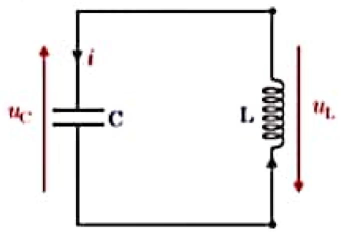
$\cdot\ \frac{di}{dt} = c\frac{d^2u_c}{dt^2}$

$$Lc\frac{d^2u_c}{dt^2} + (R+r)c\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{(R+r)}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{Lc}u_c = 0}$$

2. circuit LC idéal :

Association en série d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L et de résistance nulle.



① Equation différentielle :

d'après la loi d'additivités des tensions :

$$u_L + u_c = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + u_c = 0$$

$$Lc\frac{d^2u_c}{dt} + u_c = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{Lc}u_c = 0}$$

① Solution de l'équation différentielle :

La solution de l'équation différentielle précédente s'écrit sous la forme :

$$\boxed{u_c(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)}$$

- U_m : tension maximale aux bornes du condensateur.
- T_0 : Période propre de l'oscillation en (s).
- φ : phase

→ Détermination de l'expression de T_0 :

- $u_c = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$
- $\frac{du_c}{dt} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$
- $\frac{d^2u_c}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \underbrace{U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)}_{u_c}$

Scanned by CamScanner

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_c$$

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_c = 0$$

par identification avec l'équation différentielle on trouve :

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$$

→ Détermination de φ :

à $t=0$: $u_c(0) = U_m \cos = U_m$

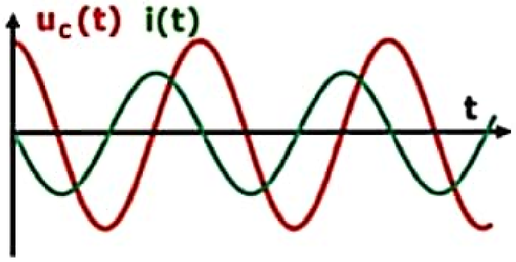
$\Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \underline{\varphi = 0}$

→ Représentation de u_c et i en fonction t :

- $\boxed{u_c(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)}$
- $i = C\frac{du_c}{dt} = -C\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

$$i = \underbrace{C\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)U_m}_{I_m} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{i(t) = I_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \frac{\pi}{2}\right)}$$



Conclusion :

u_c et i sont en quadrature de phase. Lorsque l'une est maximale ou bien minimale l'autre s'annule.

III - Énergie d'un circuit oscillant :

⊙ Énergie totale :

$$E_T = E_m + E_e = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}Cu_c^2$$

⊙ La conservation de l'énergie totale :

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2}L\frac{di^2}{dt} + \frac{1}{2}C\frac{du_c^2}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}L\left(2i\frac{di}{dt}\right) + \frac{1}{2}C\left(2u_c\frac{du_c}{dt}\right)$$

$$\frac{dE_T}{dt} = Li\frac{di}{dt} + Cu_c\frac{du_c}{dt}$$

avec : • $i = C\frac{du_c}{dt}$

• $\frac{di}{dt} = C\frac{d^2u_c}{dt^2}$

$$\frac{dE_T}{dt} = LC^2\frac{du_c}{dt}\cdot\frac{d^2u_c}{dt^2} + Cu_c\frac{du_c}{dt}$$

$$\frac{dE_T}{dt} = LC^2\frac{du_c}{dt}\left[\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c\right]$$

Circuit RLC en série

d'après l'équ. diff.

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_c = -\frac{R_T}{L}\frac{du_c}{dt}$$

Donc :

$$\frac{dE_T}{dt} = LC^2\frac{du_c}{dt}\left[-\frac{R_T}{L}\frac{du_c}{dt}\right]$$

$$= -R_T C^2\left(\frac{du_c}{dt}\right)^2$$

$$= -R_T\left(C\frac{du_c}{dt}\right)^2$$

$$\frac{dE_T}{dt} = -R_T i^2 < 0$$

$\Rightarrow E_T \downarrow$

. L'énergie totale diminue au cours du temps.

- Les oscillations sont amorties à cause de la dissipation de l'énergie par effet Joule dans la résistance.

Circuit LC idéal

$$\frac{dE_T}{dt} = 0$$

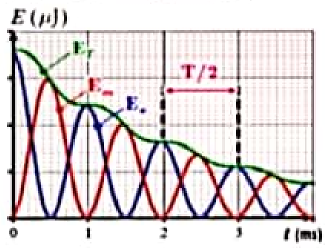
$\Rightarrow E_T = cte$

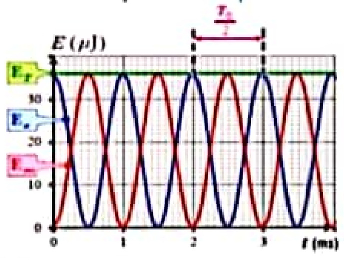
Donc l'énergie d'un circuit LC se conserve.

À chaque instant il y a transformation mutuelle de l'énergie électrostatique E_e en énergie magnétique E_m ou l'inverse.

On a donc :

$-U_m$	0	U_m
$i=0$	$i=\pm I_m$	$i=0$
$E_e = E_{e\,max}$	$E_e = 0$	$E_e = E_{e\,max}$
$E_m = 0$	$E_m = E_{m\,max}$	$E_m = 0$
$\Rightarrow E_T = E_{e\,max}$	$E_T = E_{m\,max}$	$E_T = E_{e\,max}$





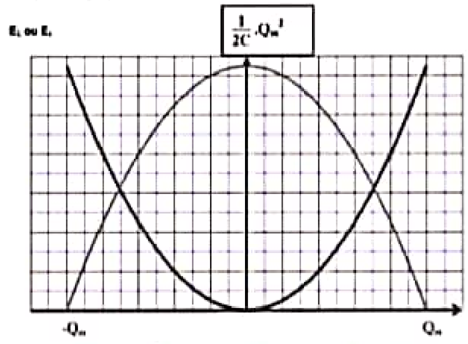
① Différents types de diagrammes énérgitique pour un circuit LC idéal:

• Courbe de variation de $E_e = f(q)$ et $E_m = g(q)$:

• $E_T = E_m + E_e = E_{e\,max} = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}$ = cte

• $E_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$: c'est l'équation d'une parabole.

• $E_m = -E_e + E_T = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C} = a'q^2 + b$: c'est l'équ. d'une parabole.
$E_m = \frac{1}{2C}(Q_m^2 - q^2)$

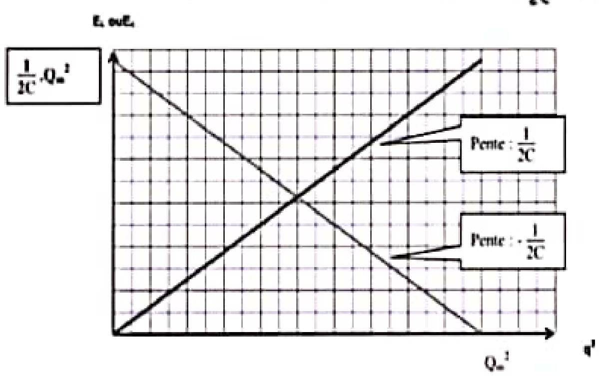


• Courbe de variation de $E_e = f(q^2)$ et $E_m = g(q^2)$:

• $E_T = E_m + E_e = E_{e\,max} = E_{m\,max}$ = cte

• $E_e = \frac{1}{2C} q^2 = a q^2$: c'est l'équation d'une droite linéaire croissante, de coéf. directeur (Pente): $a = \frac{1}{2C} > 0$

• $E_m = -E_e + E_T = -\frac{1}{2C} q^2 + E_T = a' q^2 + b$: c'est l'équ. d'une droite affine décroissante, le coéf. directeur est $a' = -\frac{1}{2C} < 0$

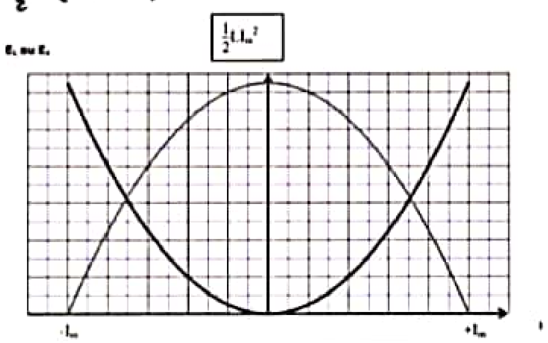


• Courbe de variation de $E_m = f(i)$ et $E_e = g(i)$:

• $E_T = E_m + E_e = E_{m\,max} = \frac{1}{2} L I_m^2$ = cte

• $E_m = \frac{1}{2} L i^2 = a i^2$: c'est l'équ. d'une parabole.

• $E_e = -E_m + E_T = -\frac{1}{2} L i^2 + E_T = a' i^2 + b$: c'est l'équ. d'une parabole.
$E_e = \frac{1}{2} L (I_m^2 - i^2)$

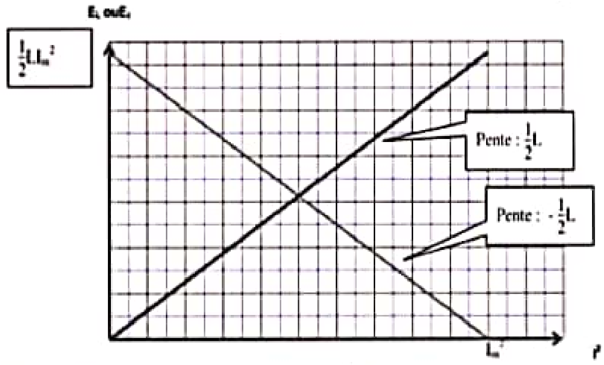


• Courbe de variation de $E_m = f(i^2)$ et $E_e = g(i^2)$:

• $E_T = E_m + E_e = E_{m\,max} = E_{e\,max}$ = cte.

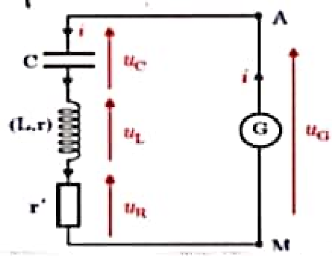
• $E_m = \frac{1}{2} L i^2 = a i^2$: c'est l'équ. d'une droite linéaire croissante, le coéf. directeur est $a = \frac{1}{2} L > 0$.

• $E_e = -E_m + E_T = -\frac{1}{2} L i^2 + E_T = a' i^2 + b$: c'est l'équ. d'une droite affine décroissante, le coéf. directeur est : $a' = -\frac{1}{2} L < 0$



IV - Entretien des oscillations:

Pour entretenir les osillations, il faut compenser les pertes d'énergie par effet joule, pour cela on montre en série un générateur délivre une tension proportionnelle à l'intensité du courant ($u_G = k i$) avec le dipôle RLC.



d'aprés la loi d'additivité des tensions:

$$u_L + u_R + u_C = u_G$$

$$L\frac{di}{dt} + ri + Ri + u_C = ki$$

$$L\frac{di}{dt} + \underbrace{(R+r)}_{R_T} i + u_C = ki$$

$$L\frac{di}{dt} + (R_T - k) i + u_C = 0$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R_T - k) C\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{(R_T - k)}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0}$$

Pour avoir des osillations sinusoïdale il faut que l'equation différentielle s'écrit sous la forme : $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$

c.à.d : $R_T - k = 0$

$\Rightarrow \underline{k = R_T}$