

# Mouvement de rotation



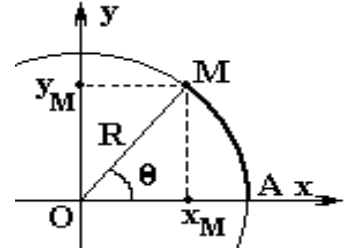
## 1. Définition :

Un mouvement de rotation est tout mouvement qu'effectue un corps autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) selon une trajectoire circulaire de rayon  $R$  autour de cet axe.

## 2. Repérage d'un point du mobile:

On peut déterminer la position d'un point  $M$  en mouvement le long d'un trajet circulaire de rayon  $R$  soit par :

- Les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  dans un référentiel  $(Oxy)$   
 $x=R.\cos(\theta)$  et  $y=R.\sin(\theta)$  avec  $R=OM$
- L'abscisse angulaire  $\theta$  tel que  $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM})$
- L'abscisse curvilignes  $S(t)$  et c'est l'arc  $AM$  avec  $S = \widehat{AM} = R.\theta$  avec  $A$  : l'origine des abscisses curvilignes  $S(A)=0$



## NB :

- $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$  : L'équation d'un cercle de rayon  $R$  et les coordonnées de son centre  $(a,b)$
- L'angle balayé entre deux instants est  $\theta=2\pi.n$  ou  $\Delta\theta=2\pi.n$  avec  $n$  le nombre de tours effectués entre les deux instants

## 3. Les équations horaires du mouvement circulaires

	Mouvement circulaire uniforme	Mouvement circulaire uniformément varié
Accélération angulaire ( $\text{rad.s}^{-2}$ )	Null $\ddot{\theta} = 0$	Constante $\ddot{\theta} = C^{te} \neq 0$
Vitesse angulaire ( $\text{rad.s}^{-1}$ )	Constante $\dot{\theta} = C^{te} \neq 0$	Varie en fonction du temps $\dot{\theta} = \dot{\theta}.t + \dot{\theta}_0$ Une fonction affine de temps d'où $\dot{\theta} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$
Abcisse angulaire (rad)	$\theta = \dot{\theta}.t + \theta_0$ Une fonction affine de temps d'où $\dot{\theta} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$	$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}.t^2 + \dot{\theta}_0.t + \theta_0$

**NB :** Tous les points d'un solide en rotation autour d'un axe fixe et à tout moment tourne avec :

- Le même abcisse angulaire  $\theta$  ou la même variation angulaire  $\Delta\theta$
- La même vitesse angulaire  $\dot{\theta} = C^{te}$
- La même accélération angulaire  $\ddot{\theta} = C^{te}$

## 4. Relation entre grandeur linéaire (translation ) et angulaire (rotation ) :

- La relation entre l'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire  $S=R.\theta$
  - La relation entre la vitesse linéaire et la vitesse angulaire  $V = R.\dot{\theta}$
  - La relation entre l'accélération tangentielle (linéaire) et l'accélération angulaire  $a_u = a_t = \frac{dv}{dt} = R.\ddot{\theta}$
  - La relation entre l'accélération normale et la vitesse angulaire  $a_n = \frac{v^2}{R} = R.\dot{\theta}^2$
- $a_G = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$  : accélération du mobile en rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ )

Les points A et B :

- Parcours les même distances  $S$ ,  
 $S_1=S_2$
- Avec la même vitesse,  
 $V_1=V_2$
- Et la même accélération,  
 $a_1=a_2$

Les points A et B :

- Parcours des distances différentes  
 $S_1=r_1.\theta$  et  $S_2=r_2.\theta$  d'où  $\frac{S_2}{S_1} = \frac{r_2}{r_1}$
- avec des vitesses différentes  
 $V_1 = r_1.\dot{\theta}$  et  $V_2 = r_2.\dot{\theta}$  d'où  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{r_2}{r_1}$
- Et des accélérations différentes  
 $a_1 = r_1.\ddot{\theta}$  et  $a_2 = r_2.\ddot{\theta}$  d'où  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{r_2}{r_1}$

## 5. Relation fondamentale ed la dynamique (RFD):

$$\sum \mathbf{M}_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

Dans un référentiel galiléen, la somme des moments des forces, appliquées à un corps en rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ), est proportionnelle à l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}$  subie par ce corps

$J_{\Delta}$ : moment d'inertie du mobile par rapport à l'axe de rotation ( $\Delta$ )

### \*\* Comment exploiter la relation fondamentale de la dynamique (RFD)

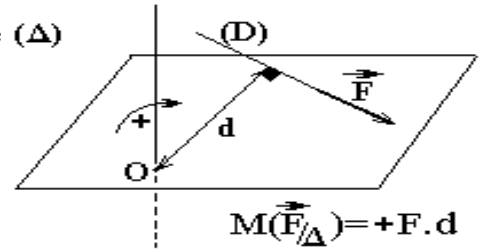
Pour résoudre un problème de dynamique en utilisant la **RFD**, la méthode est toujours la même :

1. Préciser le système à étudier
2. Faire le bilan de toutes les forces qui agissent sur le point matériel étudié (ou le centre d'inertie de l'objet étudié).
  - 2.1. Forces de contact
  - 2.2. Forces à distance
3. Faire un schéma précis et suffisamment grand pour pouvoir y représenter (tant que c'est possible) toutes les forces dont les caractéristiques bien connues.  
Exemples : le poids  $\vec{P}$  et  $\vec{R}$  la réaction de l'axe ( $\Delta$ )
4. Choisir un sens positif de rotation (Souvent identique au sens de mouvement)
5. Déterminer l'expression du travail de chacune des forces du bilan
6. Appliquer la **RFD**
7. Répondre !!!

## 6. Moment d'une force par rapport à un axe fixe

$$M(\vec{F}/\Delta) = \pm F \cdot d$$

l'axe ( $\Delta$ )



- Préciser l'axe ( $\Delta$ )
- Choisir un sens positif (Souvent dans le sens de mouvement)
- Prolonger (D) la direction (Droite d'action) de la force  $\vec{F}$
- Tracer la perpendiculaire à (D) la direction de la force  $\vec{F}$  et passant par l'axe ( $\Delta$ )
- Déterminer la distance d entre l'axe ( $\Delta$ ) et (D) la direction de la force  $\vec{F}$

### **NB:**

$M(\vec{F}/\Delta) = 0$  : le moment d'une force est nul pour toute force dont la direction est parallèle ou sécante l'axe ( $\Delta$ )

## 7. Moment d'inertie du mobile par rapport à l'axe de rotation

$$J_{\Delta} = \sum m_i \cdot r_i^2 :$$

- Moment d'inertie du mobile par rapport à l'axe de rotation ( $\Delta$ )
- S'exprime en Kg.m<sup>2</sup>
- Exprime la répartition de la matière autour de l'axe ( $\Delta$ )
- Varie si :
  - On ajoute des masses au système
  - On modifie la position d'au corps du système (modifier la distance  $r_i$ )
  - La position de l'axe ( $\Delta$ ) change

<b>Tige</b>	Tige mince de longueur $L$ tournant autour d'un axe perpendiculaire à elle-même passant par son centre		$I = \frac{1}{12} ML^2$
	Tige mince de longueur $L$ tournant autour d'un axe perpendiculaire à elle-même passant par une extrémité		$I = \frac{1}{3} ML^2$

### EXERCICE 1

- La vitesse angulaire du point M d'un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe est  $\dot{\theta} = 10 \text{ rad/s}$  ;
  - Calculer l'accélération angulaire du point M ;
  - Quelle est la nature du mouvement du point M ?
  - Écrire l'expression de l'abscisse angulaire du point M en fonction du temps , sachant que son abscisse angulaire à l'origine des dates est  $\theta_0 = 2 \text{ rad}$
- L'expression de l'abscisse angulaire du point N d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est :

$$\theta(t) = 10t^2 + 40t + 6$$

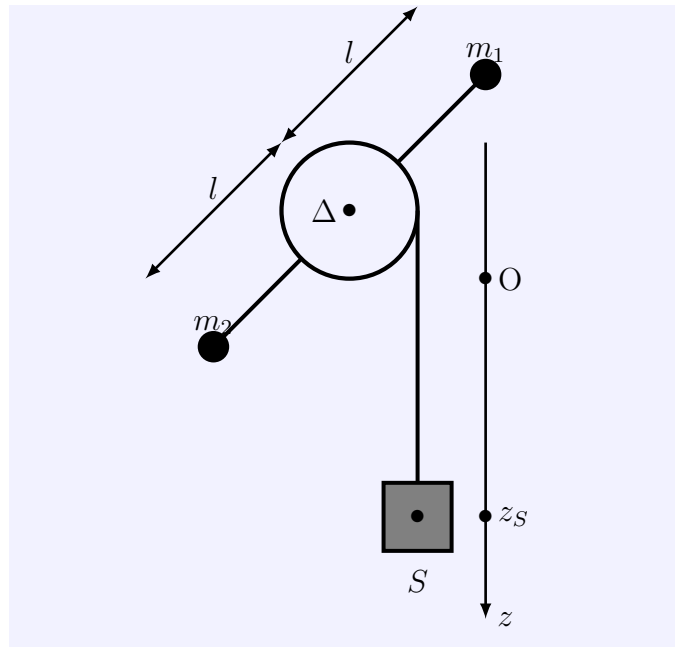
t est en (s) et  $\theta$  en rad .

- Déterminer l'expression de la vitesse angulaire du point N en fonction du temps
- Déterminer l'expression de l'accélération angulaire du point N en fonction du temps
- Quelle est la nature du mouvement du point N .

### EXERCICE 2

On considère un cylindre (C) homogène de masse  $M = 1 \text{ kg}$  et de rayon  $r = 10 \text{ cm}$  pouvant tourner autour d'un axe fixe  $\Delta$  , horizontal en passant par son centre d'inertie (G) . Une tige (T) de masse négligeable, fixée au cylindre en passant par G , à ces deux extrémités on fixe deux corps ponctuels de même masse  $m_1 = m_2 = 0,5 \text{ kg}$  leurs centres de gravité se trouvent à une distance  $l = 50 \text{ cm}$  de l'axe de rotation ( $\Delta$ ).

En enroule sur le cylindre un fil inextensible , de masse négligeable et on fixe l'autre extrémité du fil à un solide (S) de masse  $m = 10 \text{ kg}$ . Le fil ne glisse pas sur le cylindre . On lâche le système sans vitesse initiale à la date  $t = 0$  . on néglige toute sorte de frottement pendant le mouvement du système .



- Donner la signification physique des condition suivantes :
  - \* un fil inextensible , Le fil ne glisse pas sur le cylindre
- Déterminer l'accélération  $a = \frac{d^2z}{dt^2}$  du solide (S) et la tension du fil au cours du mouvement du système . L'axe Oz est orienté vers le bas .
- Quelle est la vitesse angulaire du cylindre lorsque le solide parcourt une altitude  $h = 5 \text{ m}$

On donne  $g = 10 \text{ m/s}^2$

### EXERCICE 3

Un anneau de moment d'inertie  $J_\Delta$  tourne autour de son axe ( $\Delta$ ) à raison de 90 tours par minute .

Pour freiner cet anneau , on exerce sur lui un couple de forces de moment  $\mathcal{M}_C$  constant jusqu' à son arrêt.  $\mathcal{M}_C = -0,2 \text{ N/m}$ . On néglige les frottements .

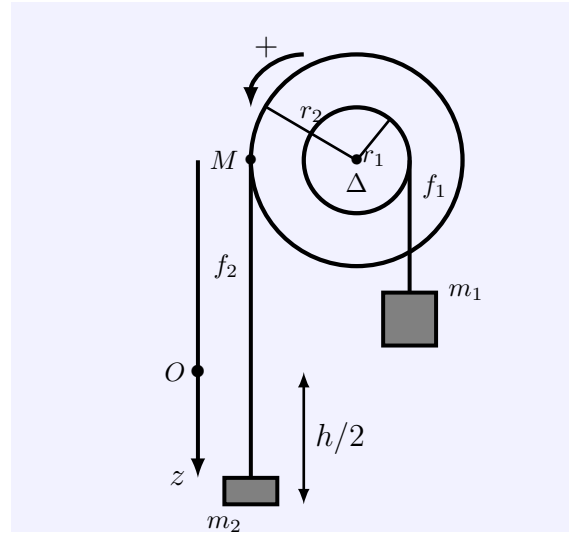
1. Quelle est la nature du mouvement de l'anneau pendant l'application du couple résistant ? Justifier la réponse .
2. Calculer la valeur de l'accélération angulaire de l'anneau pendant l'action du couple de freinage sachant que  $J_{\Delta} = 8 \times 10^{-3} \text{kg.m}^2$ .
3. Calculer la durée de freinage .

#### EXERCICE 4

Un système (S) est constitué de deux cylindres homogènes (D) et (D') de même substance , de même épaisseur, coaxiaux, solidaires l'un de l'autre. Le moment d'inertie de (S) par rapport à son axe de révolution est  $J_{\Delta} = 1,7 \times 10^{-1} \text{kg.m}^2$ .

On enroule sur chaque cylindre un fil inextensible de masse négligeable . Soit  $f_1$  le fil enroulé sur  $D_1$  de rayon  $r_1$  à son extrémité on suspend un corps de masse  $m_1 = 3 \text{kg}$  et soit  $f_2$  le fil enroulé sur le cylindre  $D_2$  de rayon  $r_2 = 2r_1 = 40 \text{cm}$ , à son extrémité on suspend un corps de masse  $m_2 = 2 \text{kg}$ .

On libère le système sans vitesse initiale .



1. Montrer que le système est en mouvement dans le sens indiqué sur la figure ci-contre

2. En réalisant une étude dynamique montrer que l'équation différentielle vérifiée par

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ peut s'écrire sous la forme suivante :}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{r_1 \cdot g(2m_2 - m_1)}{J_{\Delta} + r_1^2(4m_2 + m_1)}$$

3. En déduire les valeurs de l'accélération linéaire  $a_1$  de corps de masse  $m_1$  et  $a_2$  de corps de masse  $m_2$

4. Calculer les deux tensions  $T_1$  de  $f_1$  et  $T_2$  de  $f_2$ .

5. À l'instant  $t = 0$  les deux corps se trouvent de la même hauteur du plan horizontal ( $h=0.5 \text{m}$ ) et que le centre d'inertie du corps  $m_2$  soit confondu avec l'origine de l'axe Oz qui est orienté vers le bas .

On considère le point M contact entre le fil  $f_2$  et  $D_2$  voir figure . Trouver les caractéristiques du vecteur accélération  $\vec{a}_M$  en ce point M à un instant t où le corps  $m_2$  descend de  $\frac{h}{2}$  .

On donne  $g = 10 \text{m/s}^2$